1. Метод ограниченности функций.

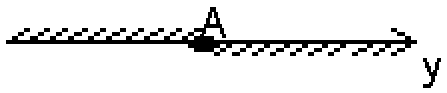
1.1. Решение уравнений.

Данный метод основан на применении следующей теоремы:

Теорема: Если на промежутке X наибольшее значение одной из функции *y=f(x), y=g(x)* равно A и наименьшее значение другой функции тоже равно A, то уравнение *f(x)=g(x)* равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Графическое представление.



$E(f(x)) \cap E(g(x))=$A

Пример 1. Решите уравнение: $\left| \lg(x-2) \right| + 1 = -\cos \pi x$.

Решение:

1. Рассмотрим функции $g(x) = \left| \lg(x-2) \right| + 1$ и $f(x) = -\cos \pi x$
2. $E(g(x)) = [1;+\infty)$, т.к $\left| \lg(x-2) \right| \geq 0$.
3. $E(f(x)) = [-1;1]$, т.к $-1 \leq \cos x \leq 1$, то $-1 \leq -\cos \pi x \leq 1$.
4. $g(x)_{наим} = 1$ для функции $g(x) = \left| \lg(x-2) \right| + 1$ и $f(x)_{наиб} = 1$ для функции $f(x) = -\cos \pi x$, значит можно воспользоваться теоремой о ограниченности функции.

5. Составляем систему уравнений и решаем её:

$$\begin{cases} \left| \lg(x-2) \right| + 1 = 1, \\ -\cos \pi x = 1. \end{cases}$$

Достаточно решить одно, более простое уравнение, и сделать проверку корней в другом уравнение.

$\left| \lg(x-2) \right| + 1 = 1,$

$\left| \lg(x-2) \right| = 0,$

$\lg(x-2) = 0,$

$10^0 = x-2,$

$1 = x-2,$

$x = 3.$

Проверка: если $x=3$, то $-\cos \pi 3 = 1, \cos \pi = -1$, -1 = -1, верно, значит $x=3$ является решением исходного уравнения.

Ответ: 3.

Пример 2. Решите уравнение: $\cos^7 x + \sin^5 x = 1.$

Решение:

Преобразуем данное уравнение:

$\cos^7 x + \sin^5 x = 1,$

$\cos^7 x + \sin^5 x = \cos^2 x + \sin^2 x,$

$\cos^2 x(\cos^5 x - 1) = \sin^2 x(1 - \sin^3 x)$

Рассмотрим функции $y = \cos^2 x(\cos^5 x - 1)$ и $f(x) = \sin^2 x(1 - \sin^3 x)$

1. $E(y) = (-\infty; 0\ ]$, т.к $\cos^5 x - 1 \le 0$, $\cos^2 x \ge 0$
2. $E(f(x)) = [0; +\infty)$, т.к $\sin^2 x \ge 0,\ 1 - \sin^3 x \ge 0$
3. Составляем систему уравнений и решаем её:

$$\begin{cases} \cos^2 x(\cos^5 x - 1) = 0, \\ \sin^2 x(1 - \sin^3 x) = 0. \end{cases}$$

Ответ: $x = 2\pi k,\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ k, m \in Z$.

1.2. Решение неравенств.

Данный метод для решения неравенств основан на следующей теореме:

Пусть множество M есть общая часть (пересечение) областей существования функций $f(x)$ и $g(x)$ и пусть для любого $x \in M$ справедливы неравенства $f(x) \ge A$ и $g(x) \le A$, где A - некоторое число. Тогда неравенство

$$f(x) \le g(x)$$

равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Пример 1. $\left|\lg(x^2 + 2x + 2) + 5\right| \le 4 - 2x - x^{2.}$

Обе части неравенства определены для всех действительных чисел x. Для любого x $\lg(x^2 + 2x + 2) = \lg((x+1)^2 + 1) \ge 0$, поэтому $\left|\lg(x^2 + 2x + 2) + 5\right| \ge 5; 4 - 2x - x^2 = 5 - (x+1)^2 \le 5.$ Следовательно, неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \left|\lg(x^2 + 2x + 2) + 5\right| = 5 \\ 4 - 2x - x^2 \end{cases},$$

которая, в свою очередь, равносильна системе

$$\begin{cases} \lg(x^2 + 2x + 2) = 0 \\ (x+1)^2 = 0. \end{cases}$$

Единственное решение второго уравнения системы есть $x = -1.$ Это число удовлетворяет первому уравнению системы. Следовательно, система и неравенство имеют одно решение $x = -1.$

Ответ: -1.

Пример 2.

$$\left|\lg(x-2)\right| + 1 \le -\cos \pi x.$$

Обе части неравенства определены на множестве $M = (2; +\infty).$ Для любого $x \in M$ имеем $\left|\lg(x-2)\right| + 1 \ge 1, -\cos \pi x \le 1.$

Поэтому неравенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \lg(x-2)=0 \\ \cos \pi x = -1. \end{cases}$$

Первое уравнение системы имеет единственное решение $x=3$, которое удовлетворяет второму уравнению системы. Следовательно, система и неравенство имеют одно решение $x=3$.

Ответ 3

2. Метод неотрицательности функций.

2.1. Решение уравнений.

Данный метод основан на следующей теореме:

Теорема:

Пусть левая часть уравнения F(x)=0 (1), есть сумма нескольких функций $F(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ каждая из которых неотрицательна для любого x из области её существования.

Тогда уравнение (1) равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = 0 \end{cases}$$

Пример 1.

Решите уравнение:

$\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{\log_{1\backslash 7}^2 \ (x^2-4x+4)}=0,$

$|x-3|+\left|\log_{\frac{1}{7}}(x-2)^2\right|=0.$

Так как $|x-3|\geq 0$ и $\left|\log_{\frac{1}{7}}(x-2)^2\right| \geq 0$, то данное уравнение равносильно системе из двух уравнений:

$$\begin{cases} |x-3|=0, \\ \left|\log_{\frac{1}{7}}(x-2)^2\right|=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3, \\ \left|\log_{\frac{1}{7}}(x-2)^2\right|=0. \end{cases}$$

Проверка:

если x=3, то $\log_{\frac{1}{7}}(3-2)^2=0$, 0 = 0, верно. Так как $x = 3$ является решением системы равносильной исходному уравнению, то оно является корнем первоначального уравнения.

Ответ: 3.

Пример 2.

Решите уравнение:

$x^4+5\cdot 4^x+4x^2\cdot 2^x-2\cdot 2^x+1=0$

преобразуем данное уравнение, выделив полные квадраты двух выражений $(x^2+2\bullet 2^x)^2+(2^x-1)^2=0$.

Так как данные функции $f(x)=(x^2+2\bullet 2^x)^2$ и $g(x)=(2^x-1)^2$ неотрицательны, то данное уравнение равносильно системе двух уравнений:

$$\begin{cases} 2^x-1=0, \\ x^2+2\cdot 2^x=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^x=2, \\ x^2+2\cdot 2^x=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0, \\ x^2+2\cdot 2^x=0. \end{cases}$$

Проверка: если $x = 0$, то 2 = 0, неверно.

Так как уравнение $2^x-1=0$ имеет единственное решение

$x = 0$, которое не является решением второго уравнения , то система не имеет решений, следовательно первоначальное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

2.2. **Решение неравенств**.

Данный метод для решения неравенств основан на следующей теореме:

Пусть левая часть неравенства $F(x) \le 0$ есть сумма нескольких неотрицательных функций $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, каждая из которых неотрицательна для любого x из области определения ее существования, тогда данное неравенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x) = 0. \end{cases}$$

Пример 1.

$$(x^2 - 5x + 6)^2 + \lg(x^2 - 4x + 5) \le 0.$$

Так как для любого x справедливы неравенства $(x^2 - 5x + 6) \ge 0$ и $\lg(x^2 - 4x + 5) = \lg(1 + (x-2)^2) \ge 0$, то данное неравенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \lg(x^2 - 4x + 5) = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы имеет два решения: $x_1 = 3$ и $x_2 = 2$. Из этих чисел только x_2 удовлетворяет первому уравнению системы. Следовательно, система и неравенство имеют единственное решение $x_2 = 2$.

Ответ: 2.

Пример 2.

$$\sqrt{x^2 - 7x + 12} + \lg^2(x^2 - 4x + 1) \le 0.$$

Каждая функция $y = \sqrt{x^2 - 7x + 12}$ и $y = \lg^2(x^2 - 4x + 1)$ неотрицательна для любого x из области ее существования. Поэтому неравенство равносильно системе уравнений $\begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ \lg^2(x^2 - 4x + 1) = 0. \end{cases}$

Первое уравнение системы имеет два решения: $x_1 = 3$ и $x_2 = 4$. Из этих чисел только 4 удовлетворяет второму уравнению системы. Следовательно, система и неравенство имеет одно решение $x_2 = 4$.

Ответ: 4.

3. Метод использования области допустимых значений .

3.1. Решение уравнений.

Иногда знание ОДЗ позволяет доказать, что уравнение не имеет решений, а иногда позволяет найти решения уравнения подстановкой чисел из ОДЗ.

Пример 1. Решите уравнение: $\sqrt{3-x}=\log_5(x-3)$

Решение:

ОДЗ этого уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $3-x\geq 0$ и $x-3\succ 0$, т.е ОДЗ есть пустое множество, значит ни одно из чисел не может являться решением, т.е.это означает, что уравнение корней не имеет.

Ответ: нет корней.

Рассмотрим ещё один пример.

Пример2. Решите уравнение: $\sqrt{|\sin x\;|}=\sqrt[4]{-|\sin x\;|}+tgx$

Решение:

ОДЗ этого уравнения состоит из чисел, удовлетворяющих условиям $|\sin x\;|\geq 0,\quad -|\sin x\;|\geq 0,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,$ т.е. ОДЗ есть $x=\pi k,\quad k\in Z.$ Сделаем проверку, подставив эти значения в уравнение, получим верное равенство.

Ответ: $x=\pi k,\;k\in Z.$

3.2. Решение неравенств.

Суть этого метода в следующем: если при рассмотрении неравенства выясняется, что обе его части определены на множестве M, состоящем из одного или нескольких чисел, то нет необходимости проводить какие-либо преобразования неравенства, достаточно проверить, является или нет каждое из этих чисел решением данного неравенства.

Рассмотрим этот метод на следующих неравенства**х**:

Пример 1. $$\left(\sqrt{x^2-6x+5}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{12x-2x^2-10}+1\right)>0.$$

1.Найдем область допустимых значений неравенства и объединим их в систему:

$$\begin{cases} x>0 \\ x^2-6x+5\geq 0 \\ 12x-2x^2-10\geq 0. \end{cases}$$

2.Решим эту систему:

$$\begin{cases} x>0 \\ x\leq 1; x\geq 5 \\ 1\leq x\leq 5. \end{cases}$$

3. Решением этой системы являются два числа: $x_1=1$ и $x_2=5$.

4.Сделав проверку в первоначальное неравенство, x = 1 не удовлетворяет ему. Следовательно, решением неравенства является x = 5.

Ответ: 5.

Пример 2. $\sqrt{1-x^2} > \lg(x-2)$.

1. Найдем область допустимых значений неравенства и объединим их в систему:

$$\begin{cases} 1-x^2 \ge 0, \\ x-2>0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ x>2. \end{cases}$$

2.Эта система не имеет решений, а значит и данное неравенство не имеет решений.

Ответ: нет решений.

4. Метод использования свойств синуса и косинуса.

4.1. Решение уравнений.

Решение некоторых тригонометрических уравнении может быть сведено к решению систем уравнений. Примерами таких уравнений могут быть следующие:

$\sin\alpha x \sin\beta x = \pm 1,$

$\sin\alpha x \cos\beta x = \pm 1,$

$\cos\alpha x \cos\beta x = \pm 1,$

$A(\sin\alpha x)^m + B(\sin\beta x)^n = |A| + |B|,$

$A(\sin\alpha x)^m + B(\cos\beta x)^n = |A| + |B|,$

$A(\cos\alpha x)^m + B(\cos\beta x)^n = |A| + |B|,$

где α, β, A и B – данные отличные от нуля числа, m и n – данные натуральные числа. При этом используются следующие свойства: если для некоторого числа x_0 справедливо строгое неравенство $|\sin\alpha x_0| < 1$ или $|\cos\alpha x_0| < 1$, то такое число x_0 не может быть корнем ни одного из уравнений данного вида.

Пример 1. Решите уравнение: $\sin x \cdot \cos 4x = 1$ (1)

Решение:

1. Если число x_0 - решение уравнения (1), то $\sin x_0$ =1 или $\sin x_0$ =-1.
2. Если $|\sin x_0| < 1$, то из уравнения (1) следует, что $|\cos x_0| > 1$, а это невозможно.
3. Если $\sin x_0$ =1, то $\cos 4 x_0$ =1.
4. Если $\sin x_0$ =-1, то $\cos 4 x_0$ = - 1.
5. Следовательно, любое решение уравнения (1) является решением совокупности двух систем уравнений

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos 4x = 1; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sin x = -1, \\ \cos 4x = -1. \end{cases} \quad (3)$$

6. Первое уравнение системы (2) имеет решения $x_k = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Все они удовлетворяют второму уравнению системы (2), т.е. являются её решением.

7. Первое уравнение системы (3) имеет решения $x_m = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in Z$. Ни одно из этих чисел не удовлетворяет второму уравнению системы (3). Поэтому система (3) не имеет решений.
8. Значит, все решения уравнения (1) совпадают со всеми решениями системы (2).

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

4.2. Решение неравенств.

Аналогичные рассуждения могут применяться и при решении неравенств. Рассмотрим следующий пример:

Пример 1. $\sin^4 2x + 4\cos 8x \geq 5.$

Решение.

1.Допустим x_0-решение данного неравенства, тогда $\cos 8x_0 = 1,$ так как в противном случае было бы справедливо неравенство $|\sin 2x_0| > 1,$ что невозможно. Следовательно, решением неравенства является решение системы:

$$\begin{cases} |\sin 2x| = 1 \\ \cos 8x = 1. \end{cases}$$

2. Решая первое уравнение, получается $x_k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$ Это решение удовлетворяет второму уравнению. Значит, это решение является решением неравенства.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

5. Метод использования числовых неравенств.

5.1. Решение уравнений.

Применяя то или иное числовое неравенство к одной из его частей уравнения, его можно заменить равносильной ему системой уравнений. Примером такого неравенства является неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где a и b – неотрицательные числа, причём равенство здесь возможно лишь при a=b.

Можно использовать следствие из этих неравенств, например, $a+\frac{1}{a} \geq 2$, при $a>0$, причём $a+\frac{1}{a}=2$ тогда и только тогда, когда $a=1$, или $a+\frac{1}{a} \leq 2$ при $a<0$, причём

$a+\frac{1}{a}=-2$ тогда и только тогда, когда $a=-1$.

Пример 1. Решите уравнение:

$$\sqrt{x^2+2x+4}+\frac{4}{\sqrt{x^2+2x+4}}=4-\log_3^4(x^2+x^4+1).$$

Решение.

1. ОДЗ=R.
2. Преобразуем левую часть:

$$2(\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x+2x+4}}) \geq 4,$$

причём она равна четырём, если x=0.

3. Правая часть при x=0 также равна четырём, а для всех $x \neq 0$ меньше четырёх
4. Следовательно, x=0 , единственное решение

Ответ: $x = 0$.

Пример 2. Решите уравнение:

$$(\frac{1}{Sin^2x}+\frac{1}{Cos^2 2x})(Sin^8x+Cos^2 2x) = \quad 4Cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2}\ .$$

Решение.

1. Введём новые переменные: $Sin^8 x = a$, $Cos^2 2x = b$, где a>0 и b>0.

2. Перепишем левую часть уравнения и докажем, что $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(a+b) \geq 4.$
3. Применим неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} \text{ и } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ ,откуда}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(\frac{a+b}{2}) \geq 1 \text{ т.е. } (\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(a+b) \geq 4.$$

4. ОДЗ: $\begin{cases} \sin^8 x > 0, \\ \cos^2 2x > 0. \end{cases}$

5. Так как $(\frac{1}{Sin^2 x}+\frac{1}{Cos^2 2x})(Sin^8 x + Cos^2 2x) \geq 4$, а

$4Cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2} \leq 4$ то данное уравнение равносильно системе из двух уравнений

$$\begin{cases} (\frac{1}{Sin^2 x}+\frac{1}{Cos^2 2x})(Sin^8 x + Cos^2 2x) = 4, \\ 4Cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2} = 1. \end{cases}$$

6. Из второго уравнения системы находим его решения $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = -\frac{\pi}{2}$. Подставим эти значения в первое уравнение системы, получим верное равенств, следовательно, они являются его решением. Значит, $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = -\frac{\pi}{2}$ являются решением исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = -\frac{\pi}{2}$.

5.2. Решение неравенств.

Пример.

$$\sqrt{x^2+4}+\frac{4}{\sqrt{x^2+4}} \leq 4-\log_3{}^4\left(x^4+x^2+1\right).$$

1. Преобразуем левую часть неравенства, получаем:

$$2\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right),$$

Применяя формулу этого метода, получаем, что для любого х справедливо неравенство:

$$2\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\right)\geq 4,$$

Равенство здесь справедливо, когда х=0.

Так же для любого х справедливо неравенство:

$$4-\log_3{}^4\left(x^4+x^2+1\right)\leq 4\,,$$

Равенство здесь справедливо, когда х=0.

2.Следовательно, неравенство имеет одно решение х=0.

3. Из последних двух неравенств следует, что исходное неравенство справедливо лишь тогда, когда обе части исходного неравенства равны 4, а это возможно лишь при $x = 0$.

Ответ: 0.

6. Метод использования производной.

6.1. Решение уравнений.

Использование монотонности функции.

Пример 1. Решите уравнение: $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$

Решение:

1. Рассмотрим функцию $y = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4$
2. $D(y) = (-\infty; \frac{1}{3}\ ]$
3. $y' = 5x^4 + 3x^2 + \dfrac{3}{2\sqrt{1-3x}}$
4. Эта производная принимает только положительные значения на всей области определения, значит функция $y = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4$ возрастает. Следовательно, она принимает каждое своё значение только в одной точке. Это означает, что данное уравнение имеет не более одного корня.
5. Подбором находим, что $x = -1$.

Ответ: $x = -1$

Использование наибольшего и наименьшего значений функции

Пример 2. Решите уравнение: $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$.

Решение:

1. ОДЗ уравнения есть интервал $2 \le x \le 4$.
2. Рассмотрим функцию $y = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x}$ на отрезке $[2;4]$
3. $y' = \frac{1}{4}(x-2)^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{4}(4-x)^{-\frac{3}{4}}$
4. $\frac{1}{4}(x-2)^{-\frac{3}{4}} - \frac{1}{4}(4-x)^{-\frac{3}{4}} = 0$

   $x = 3$
5. Так как функция непрерывна на своей области определения, то её наибольшее и наименьшее значения находятся среди чисел $y(2)$, $y(3)$, $y(4)$.
6. Наибольшее значение есть $y(3) = 2$, следовательно уравнение имеет единственный корень $x = 3$.

Ответ: 3.

Применение теоремы Лангранжа.

Теорема: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и имеет производную на интервале $(a;b)$, то найдется такая точка с интервала $(a;b)$, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Пример 3. Решите уравнение: $3\cdot 2^{x+2}-7x=17$

Решение.

1. Подбором находим, что $x=1$ и $x=-2$. Докажем, что других корней уравнение не имеет.
2. Предположим, что уравнение имеет три корня $x_1<x_2<x_3$
3. Рассмотрим функцию $f(x)=3\cdot 2^{x+2}-7x-17$. Она непрерывна на всей числовой прямой.
4. Найдем её производную: $f'(x)=3\cdot 2^{x+2}\ln 2-7$. Данная функция тоже непрерывна на всей числовой прямой.
5. По теореме Лагранжа имеем
$f(x_2)-f(x_1)=f'(c_1)(x_2-x_1)=0, x_1<c_1<x_2,$
$f(x_3)-f(x_2)=f'(c_2)(x_3-x_2)=0, x_2<c_2<x_3.$

6. Значит, существует хотя бы две точки c_1 и c_2, в которых производная функции *f(x)* равна нулю.

7. Уравнение $3\cdot 2^{x+2}\ln 2-7=0$ имеет только один корень.

8. Значит , заданное уравнение имеет два корня: -2 и 1.

Ответ: -2, 1.

6.2. Решение неравенств.

Пример1. Решить неравенство $20x^7+28x^5+210x-35\sin 2x>0.$

Решение.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=20x^7+28x^5+210x-35\sin 2x.$
D(*f*) = $(-\infty;+\infty)$.

2. $f'(x)=140x^6+140x^4+210-70\cos 2x.$ D(f') = $(-\infty;+\infty)$. $f'(x)>0$ на области определения, значит функция *f(x)* возрастает на своей области определения и принимает каждое своё значение ровно в одной точке.

3. Тогда уравнение *f(x) = 0* может иметь не более одного корня и таким корнем является *x* = 0.

4. Определим знаки функции: так как функция *f(x)* определена и непрерывна на всей числовой прямой, то для *x* < 0 имеем *f(x)<0,* а для x >0 имеем *f(x)>0.*

5. Значит , решением исходного неравенства являются все *x* из промежутка $(0;+\infty)$.

Ответ: $(0;+\infty)$.

7. Решение неравенств методом замены функций.

Данный метод основан на следующем утверждении:

Если область определения, нули и промежутки знакопостоянства функции $f(x)$ соответственно совпадают с областью определения, нулями и промежутками знакопостоянства функции $g(x)$, то неравенства

$$p(x)f(x)\ge 0$$

и

$$p(x)g(x)\ge 0$$

равносильны.

Это утверждение означает то, что если одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ имеет более простой вид, то при решении этих неравенств ее можно заменить на другую. Рассмотрим основные примеры таких пар функций.

Функции

$$f(x)=a^{u(x)}-a^{v(x)}, a>1 \text{ и } g(x)=u(x)-v(x)$$

Области определения функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают. Кроме того, при $a>1$:

$$a^{u(x)}-a^{v(x)}\ge 0 \Leftrightarrow a^{u(x)}\ge a^{v(x)} \Leftrightarrow u(x)\ge v(x) \Leftrightarrow u(x)-v(x)\ge 0.$$

Следовательно, для функций $f(x)$ и $g(x)$ условия утверждения выполнены.

Пример 1. Решите неравенство

$$\frac{4^{x^2+3x-2}-(0,5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\le 0.$$

Приведем числитель дроби к основанию 2, а знаменатель к основанию 5.

$$\frac{2^{2x^2+6x-4}-2^{-2x^2-2x+1}}{5^x-5^0}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^2+6x-4-(-2x^2-2x+1)}{x-0}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4x^2+8x-5}{x}\le 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x}\le 0.$$

Последнее неравенство решается методом интервалов, его решением является объединение промежутков $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Функции

$$f(x)=|u(x)|-|v(x)| \text{ и } g(x)=u^2(x)-v^2(x).$$

Области определения функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают. Кроме того,

$$\left|u(x)\right|-\left|v(x)\right|\ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\left|u(x)\right|\ge\left|v(x)\right| \Leftrightarrow$$
$$u^2(x)\ge v^2(x) \Leftrightarrow$$
$$u^2(x)-v^2(x)\ge 0.$$

Следовательно, для функций $f(x)$ и $g(x)$ условия утверждения выполнены.

Пример 1.

$$\frac{\left|3x-2\right|-\left|2x-3\right|}{\left|x^2+x-8\right|-\left|x^2-x\right|}\le 0,$$
$$\frac{(3x-2)^2-(2x-3)^2}{(x^2+x-8)^2-(x^2-x)^2}\le 0,$$
$$\frac{(3x-2-2x+3)(3x-2+2x-3)}{(x^2+x-8-x^2+x)(x^2+x-8+x^2-x)}\le 0,$$
$$\frac{(x+1)(5x-5)}{(2x-8)(2x^2-8)}\le 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{(x+1)(x-1)}{(x-4)(x-2)(x+2)}\le 0.$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов.
Ответ: $(-\infty;-2)\cup[-1;1]\cup(2;4)$.

Пример 2.

$$\frac{\left|\left|x^2-x\right|-1\right|-1}{\left|\left|4x+3\right|-2\right|-1}\ge 0,$$

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{(\left|x^2-x\right|-2)\cdot\left|x^2-x\right|}{(\left|4x+3\right|-3)(\left|4x+3\right|-1)}\ge 0,$$
$$\frac{(x^2-x-2)(x^2-x+2)\cdot\left|x^2-x\right|}{4x(4x+6)(4x+2)(4x+4)}\ge 0,$$
$$\frac{(x+1)(x-2)\cdot\left|x^2-x\right|}{x(x+1,5)(x+0,5)(x+1)}\ge 0.$$

Множество $(-\infty;-1,5)\cup(-0,5;0)\cup\{1\}\cup[2;+\infty)$ - решение последнего неравенства.
Ответ: $(-\infty;-1,5)\cup(-0,5;0)\cup\{1\}\cup[2;+\infty)$.

Функции $f(x)=\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[n]{v(x)}$ и $g(x)=u(x)-v(x)$, где $D(g):\begin{cases}u(x)\ge 0\\ v(x)\ge 0\end{cases}$ при четном n.

При нечетном n утверждение $p(x)f(x)\ge 0 \Leftrightarrow p(x)g(x)\ge 0$ справедливо. Кроме того, при четном n области определения функций совпадают, и

$$\sqrt[n]{u(x)}-\sqrt[n]{v(x)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n]{u(x)} \geq \sqrt[n]{v(x)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u(x) \geq v(x) \\ u(x) \geq 0 \\ v(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) - v(x) \geq 0 \\ u(x) \geq 0 \\ v(x) \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, при четном n для функций $f(x)$ и $g(x)$ также выполнены условия утверждения.

Пример 1.

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{3x-2}} - \sqrt{x+\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}} < 0.$$

Так как $x - 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 1)^2$, и $x + 3 - 4\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 2)^2$, то

$$\frac{x + \sqrt{3x-2} - x - \sqrt{2x-3}}{x - 2\sqrt{x-1} - x - 3 + 4\sqrt{x-1}} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3}}{2\sqrt{x-1} - 3} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3x-2} - \sqrt{2x-3}}{\sqrt{4x-4} - \sqrt{9}} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{3x-2-2x+3}{4x-4-9} < 0, \\ x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{4x-13} < 0, \\ x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x < \frac{13}{4}.$$

Ответ: $\left[\dfrac{3}{2}; \dfrac{13}{4}\right)$.

Пример 2.

$$\frac{|x+1| - \sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2} - x} \leq 0.$$

Так как $|a| = \sqrt{a^2}; a = \sqrt[3]{a^3}$ и $|a|^2 = a^2$, то

$$\frac{|x+1|-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-x}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-\sqrt[3]{x^3}}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+1-5+2x+2x^2}{x^3+2x^2-5x+2-x^3}\le 0 \Leftrightarrow\\ 5-2x-2x^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{3x^2+4x-4}{2x^2-5x+2}\le 0\\ 2x^2+2x-5\le 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x+2)\left(x-\dfrac{2}{3}\right)}{(x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}\le 0\\ -\dfrac{1+\sqrt{11}}{2}\le x\le \dfrac{\sqrt{11}-1}{2}.\end{cases}$$

Решив последнюю систему методом интервалов, получаем

$$\left[-2;\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{3};\frac{\sqrt{11}-1}{2}\right].$$

Ответ: $\left[-2;\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{2}{3};\frac{\sqrt{11}-1}{2}\right]$.

Функции

$f(x)=\log_a u(x)-\log_a v(x)$, при $a>1$ и $g(x)=u(x)-v(x)$,

$$D(g):\begin{cases}u(x)>0\\ v(x)>0.\end{cases}$$

Области определения функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают. Кроме того, при $a>1$:

$$\log_a u(x)-\log_a v(x)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\log_a u(x)\ge \log_a v(x) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}u(x)\ge v(x)\\ u(x)>0\\ v(x)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u(x)-v(x)\ge\\ u(x)>0\\ v(x)>0\end{cases}.$$

Следовательно, для функций $f(x)$ и $g(x)$ при $\begin{cases}u(x)>0\\ v(x)>0\end{cases}$ выполнены условия первоначального утверждения.

Пример 1.

$$\frac{\log_2(3x+2)}{\log_3(2x+3)}\le 0.$$

Это неравенство равносильно следующему:

$$\frac{\log_2(3x+2)-\log_2 1}{\log_3(2x+3)-\log_3 1}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{3x+2-1}{2x+3-1}\le 0\\ x>-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x+1}{2x+2}\le 0\\ x>-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{3x+1}{x+1}\le 0\\ x>-\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{2}{3}<x\le -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right]$.

Пример 2.

$$\frac{(\log_2(2x+1)-\log_2(x+2))(|x|-|x-2|)}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x-1}}\le 0.$$

Это неравенство равносильно следующему:

$$\begin{cases}\dfrac{((2x+1)-(x+2))(x^2-(x-2)^2)}{(3x-2)-(2x-1)}\le 0\\ x\ge\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x-1)\cdot 2\cdot 2(x-1)}{x-1}\le 0\\ x\ge\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2}{x-1}\le 0\\ x\ge\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow \frac{2}{3}\le x<1.$$

Ответ: $\left[\dfrac{2}{3};1\right)$.

Изложенные методы решения эффективны при решении неравенств, левая часть которых представляет собой произведение или частное двух функций указанных выше видов, а правая часть равна нулю.

Для того , чтобы успешно решать такие уравнения и неравенства , предлагаем придерживаться общего алгоритма:

1.**Визуально проанализировать** уравнение(неравенство)
(определить тип, не спешить раскрывать знак модуля, скобки, возводить в степень)

2. Преобразовать, если необходимо
3. Определить способ решения и учитывать его особенности при выполнении

4. В процессе преобразований необходимо постоянно следить за областью допустимых значений и равносильностью преобразований
5. Уравнение – проверка!